www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 1990

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

OPTION M'

Le but de ce problème est d'étudier certaines solutions d'une équation aux dérivées partielles, et notamment le comportement de ces solutions au voisinage de l'origine. Cette étude, qui fait l'objet de la seconde partie, s'appuie sur des propriétés de séries, dites de Dirichlet, établies dans la première partie. Tout résultat fourni par l'énoncé peut être utilisé dans les questions ultérieures même s'il n'a pas été démontré.

I

Dans cette partie, (λ_n), $n \in \mathbb{N}$, est une suite strictement croissante non majorée de réels positifs ou nuls et Σa_n une série convergente à termes complexes. On pose

$$D_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \quad , \quad u_n(z) = a_n e^{-\lambda_n z} \quad .$$

Pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on note $\Omega(\theta)$ le secteur angulaire fermé

$$\Omega(\theta) = \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \, ; \, z \neq 0 \, , \, |\mathrm{Arg}(z)| \leqslant \theta\}$$

où $\mathrm{Arg}(z)$ est l'argument de z compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

1. Si $z = x + iy$ est un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}(z) = x > 0$, et si α et β sont deux réels tels que $\alpha < \beta$, exprimer $e^{-z\alpha} - e^{-z\beta}$ à l'aide d'une intégrale, et établir l'inégalité

$$|e^{-z\alpha} - e^{-z\beta}| \leqslant \frac{|z|}{x}(e^{-x\alpha} - e^{-x\beta}) \quad .$$

2.a. En effectuant une transformation d'Abel de l'expression $\sum_{p}^{q} u_n(z)$, montrer que la série (de Dirichlet) $\Sigma u_n(z)$ converge uniformément par rapport à z dans $\Omega(\theta)$.

b. On note $f(z)$ la somme de cette série. Montrer que f est définie et continue dans le demi-plan ouvert P caractérisé par $\mathrm{Re}(z) > 0$. Quelle est la limite de f lorsque z tend vers 0 dans $\Omega(\theta)$?

3. Dans cette question, on suppose que la variable $z = x$ est réelle, et on étudie la restriction de f sur $[0,+\infty[$, notée encore f.

a. Montrer que si $\rho > 0$ et $x_0 > 0$ sont deux réels fixés, la série $\Sigma a_n \lambda_n^{\rho} e^{-\lambda_n x}$ converge uniformément par rapport à x sur $[x_0,+\infty[$.

b. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

c. Comment ces deux dernières démonstrations se simplifient-elles dans le cas où Σa_n converge absolument ?

4. On revient à la variable complexe $z = x + iy$; le nombre réel $Y > 0$ étant donné, on définit pour $x > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ la fonction g_Y par

$$g_Y(x, \omega) = \frac{1}{2Y}\int_{-Y}^{Y} f(x + iy)e^{i\omega y} \, dy \quad .$$

a. En justifiant l'intégration terme à terme adéquate, exprimer g_Y comme somme d'une série Σv_n dont on explicitera le terme général v_n en fonction de x , ω et Y , en distinguant deux cas selon que ω coïncide ou non avec l'un des λ_n .

.../...

b. Soient V la fonction de la variable réelle λ définie pour $\lambda > \omega$ par

$$V(\lambda) = e^{-\lambda x}\frac{\sin((\lambda - \omega)Y)}{(\lambda - \omega)Y}$$

et V' sa dérivée. Trouver, pour $\lambda \geqslant \omega + 1$, une majoration de $|V'(\lambda)|$ de la forme $e^{-\lambda x}B(x)$ où B est une fonction indépendante de ω et de Y.

c. En déduire, pour tout couple (λ, μ) de réels tels que $\omega + 1 \leqslant \lambda < \mu$, l'inégalité

$$|V(\mu) - V(\lambda)| \leqslant B_1(x)(e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}) \qquad \left[\ldots \leq B_1(x)\left(e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}\right)\right]$$

où B_1 est une fonction indépendante de ω et de Y, qu'on explicitera.

d. La série $\Sigma v_n(x, \omega, Y)$ converge-t-elle uniformément par rapport à $Y > 0$ lorsque $x > 0$ et ω sont fixés ?

Donner, en fonction notamment de $x > 0$ et de ω, la valeur de la limite de la somme de cette série lorsque Y tend vers $+\infty$.

e. Les λ_n étant fixés, l'application qui associe f à la suite (a_n), $n \in \mathbb{N}$, est-elle injective ?

♦

II

Dans cette partie, on étudie certaines fonctions F des deux variables réelles x et t, définies et continues sur le quart de plan fermé $Q = [0,+\infty[^2$, dérivables partiellement une fois par rapport à x et deux fois par rapport à t sur le quart de plan ouvert $\overset{\circ}{Q} =]0,+\infty[^2$, vérifiant en tout point de $\overset{\circ}{Q}$ l'égalité $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \dfrac{\partial F}{\partial x}$

et telles que, de plus, pour tout $x > 0$, $F(x, 0) = 0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial t}\left(x, \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

5. Sous les hypothèses précédentes, on cherche celles des fonctions F qui sont de la forme $F(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$ en tout point de Q, les fonctions φ et ψ étant définies sur $[0,+\infty[$, et F vérifiant les conditions supplémentaires suivantes : $\left|F\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)\right| = 1$ et $t \mapsto F(0, t)$ croît à l'origine $t = 0$. Montrer que ces fonctions F constituent une suite $(F_n) = (\varphi_n \psi_n)$, $n \in \mathbb{N}$, qu'on explicitera.

6. Soit h une fonction réelle de classe C^1 sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$.

a. Définir la fonction H réelle, 2π-périodique, continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, dont la série de Fourier est de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(2n + 1)t$, et qui vérifie sur l'intervalle $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ l'égalité $H(t) = th(t)$.

b. Exprimer b_n à l'aide d'une intégrale faisant intervenir h (au lieu de H).

c. Trouver une série de fonctions dont chaque terme soit proportionnel à l'une des fonctions F_n de la question 5, qui soit convergente sur Q, et dont la somme F vérifie l'égalité $F(0, t) = th(t)$ pour tout $t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$.

d. Montrer que cette fonction F vérifie les conditions imposées au début de II.

.../...

e. Soit Q* le quart de plan Q privé de l'origine. Montrer qu'il existe une fonction G définie et continue sur Q* et telle que $F(x, t) = tG(x, t)$ en tout point de Q*.

7. Dans cette question, on suppose que h est la constante 1.

a. Déterminer explicitement la série de somme F définie en 6.c.

b. Trouver la série de Fourier de la fonction h_1 2π-périodique, paire, égale à 1 sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et à -1 sur $]\frac{\pi}{2}, \pi]$. En déduire la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

c. Pour (x, t) fixé dans Q, on définit sur $[1, +\infty[$ la fonction $U_{x,t}$ par

$$U_{x,t}(s) = e^{-xs^2} \frac{\sin(ts)}{ts^2} - \frac{1}{s} \qquad \left[U_{x,t}(s) = e^{-xs^2} \frac{\sin(ts)}{ts^2} - \frac{1}{s} \right]$$

où, pour $t = 0$, le quotient $\frac{\sin(ts)}{ts^2}$ est remplacé par $\frac{1}{s}$. Etablir la convergence de la série

$$\Sigma \left| U_{x,t}(4n+1) - U_{x,t}(4n+3) \right| . \qquad \left[\Sigma \left| U_{x,t}(4n+1) \dots \right| \right]$$

d. Démontrer l'inégalité $\sum_{k=p}^{+\infty} \left| U_{x,t}(4k+1) - U_{x,t}(4k+3) \right| \leqslant K\sqrt{x} + \frac{4}{4p+1}$

où K est un réel positif indépendant de x, t et p, et dont on ne demande pas la valeur numérique (on pourra majorer convenablement la valeur absolue $|U'_{x,t}(s)|$ de la dérivée de $U_{x,t}$ par rapport à s).

e. En posant $G(0, 0) = 1$, montrer que la fonction G définie en 6.e est, dans le cas où $h = 1$, continue sur Q.

8. On reprend les notations de la question 6, mais on suppose que h est de classe C^2 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

a. Montrer que $(2n+1)^2 b_n$ est de la forme $(-1)^n c + \beta_n$, où c est un réel qu'on explicitera à l'aide de la fonction h, et où β_n^2 est le terme général d'une série convergente. En déduire la convergence absolue de la série $\Sigma \frac{\beta_n}{2n+1}$.

b. La fonction G associée à h comme dans 6.e admet-elle un prolongement continu sur Q ? S'il en est ainsi, exprimer $G(0, 0)$ à l'aide de h.

c. Exprimer à l'aide de h la valeur de $G(0, t)$ pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et pour $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Calculer au point $t = \frac{\pi}{2}$ la différence entre la dérivée à droite et la dérivée à gauche de la fonction obtenue.

d. Exprimer à l'aide de h la fonction définie sur $]0, \pi]$ par $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n c \frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)^2 t}$ et comparer la différence entre sa dérivée à droite et sa dérivée à gauche au point $t = \frac{\pi}{2}$ à la différence obtenue à la question précédente. Le résultat de cette comparaison pouvait-il être prévu par l'étude de la dérivée de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta_n \sin(2n+1)t}{(2n+1)^2 t}$?

♦ ♦
♦

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail